Différentiabilité de l'exponentielle de matrices

Référence : Rouvière p.307

Théorème :
Soit exp : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$D(\exp)(X)(H) = e^X \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-adX)^k}{(k+1)!}$$

où $adX(H) = XH - HX \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$

Preuve :

Tout d'abord, résolvons les deux systèmes linéaires suivants :

$$S_1 : \begin{cases} f'(t) = Af(t) \\ f(0) = H \end{cases}$$

et

$$S_2 : \begin{cases} g'(t) = e^{tA}H \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Le système S_1 entraîne :

$$\begin{aligned} (e^{-tA}f(t))' &= e^{tA}f'(t) - Ae^{-tA}f(t) \\ &= e^{tA}f'(t) - e^{-tA}(Af'(t)) \text{ car } e^{-tA} \text{ est un polynôme en A et donc commute avec A} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $e^{-tA}f(t)$ est constante et est donc en particulier égale à sa valeur en 0.
$e^{-tA}f(t) = e^0 f(0) = H$ d'où $f(t) = e^{tA}H$.
La réciproque est immédiate.
Maintenant, pour obtenir g, on doit intégrer termes à termes la série de l'exponentielle, d'où :

$$g(t) = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^{k+1}}{(k+1)!}\Big)H$$

De plus, $g(0) = 0$, donc on a trouvé g.

Posons ici $f(t) = e^{tX}He^{-tX}$, alors : $f'(t) = Xe^{tX}He^{-tX} - e^{tX}He^{-tX}X = adX(f(t))$
D'après la résolution de S_1 avec $A = adX \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ et $f(0) = 0$, on a :
$f(t) = e^{tadX}H$, et en appliquant en $t = 1$: $e^X He^{-X} = e^{adX}H$

Soit maintenant $g(t) = \partial_{u=0}(e^{-tX}e^{t(X+uH)})$ où t et u sont deux variables réelles. On remarque $g(0) = 0$.
De plus, comme exp est de classe $\mathscr{C}^2$ (même $\mathscr{C}^\infty$ car polynomiale) alors il en est de même pour l'application :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (t,u) \mapsto e^{-tX}e^{t(X+uH)} \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \partial_t \partial_{u=0}(e^{-tX} e^{t(X+uH)}) \text{ par le théorème de Schwarz} \\
&= \partial_{u=0} \partial_t (e^{-tX} e^{t(X+uH)}) \\
&= \partial_{u=0}(u e^{-tX} H e^{t(X+uH)}) \\
&= e^{-tX} H e^{tX} \\
& \quad \text{par ce qui a été fait précedemment :} \\
g(t) &= e^{-t.adX} H \,\text{et}\, g(0) = 0
\end{aligned}$$

Concluons : On sait que $g'(t) = e^{tA}.H \Rightarrow g(t) = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+1}A^k}{(k+1)!}\Big).H$ et ici on sait que $g(t) = e^{-t.adX}H$.

Donc : $g(1) = \partial_{u=0}(e^{-X}e^{X+uH}) = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-adX)^k}{(k+1)!}\Big).H$ avec $(A = -adX)$ et $t = 1$.

Comme l'exponentielle est différentiable en X, on a d'ailleurs :

$$\partial_{u=0}(e^{-X}e^{X+uH}) = e^{-X}.D(\exp)(X)(H)$$

Finalement, en rassemblant :

$$D(\exp)(X)(H) = e^X.\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-adX)^k}{(k+1)!}\Big)$$

*Recasage :*156, 215, 221, 220.